Méthode QR (153, 156, 162)

Ciarlet p. 90 et 123

I. Rappels

Thm : (Factorisation QR) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Il existe Q unitaire et R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.
- On peut choisir R de sorte à avoir $R_{ii} \geq 0 \ \forall i$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors sa factorisation QR est unique

Démo : 3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe au moins une factorisation $A = QR$ avec $R_{ii} > 0 \ \forall i$.

en effet, $\det(A) = \det(Q)\det(R)$

comme R est triangulaire supérieure $\det(R) = \prod_{i=1}^{n} R_{ii} > 0$ car $\det(A) \neq 0$.

soit $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ alors $Q_2^* Q_1 = R_2R_1^{-1} =: \Delta$.

donc $\Delta^* \Delta = Q_1^* Q_2 Q_2^* Q_1 = I_d$ avec Δ triangulaire supérieure.

Donc $\Delta^* \Delta$ est une décomposition de Cholesky de l'identité.

De plus $(R_1)_{ii} > 0$ et $(R_2)_{ii} > 0$ on a alors $\Delta_{ii} = \dfrac{(R_2)_{ii}}{(R_1)_{ii}} > 0$

Ainsi par unicité de la décomposition de Cholesky on a $\Delta = I_d$ ie $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$

rem : Si on impose pas $R_{ii} > 0 \ \forall i$, alors deux décompositions QR d'une même matrice A diffèrent de la manière suivante :

$$A = Q_1R_1 = Q_2R_2 \quad \text{donc} \quad \underbrace{Q_2^* Q_1}_{\text{unitaire}} = \underbrace{R_2R_1^{-1}}_{\text{triangulaire supérieure}}$$

Or toute matrice unitaire et triangulaire supérieure est diagonale (pour $i \neq j$ $\Delta_i^* \Delta_j = 0$ pour une telle matrice)

on en déduit donc que

$$Q_2^* Q_1 = R_2 R_1^{-1} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \quad \text{avec } |d_i| = 1 \ \forall i.$$

II. Convergence.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on a l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \quad \text{où } A_k = Q_k R_k \text{ sa factorisation QR} \end{cases}$$

rem : On cherche à montrer que sous certaines conditions, cet algorithme converge vers les valeurs propres de A.

thm : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ avec des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$.
On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$ et que P^{-1} admet une décomposition LU.
Alors la suite (A_k) est telle que : $\begin{cases} \lim (A_k)_{ii} = \lambda_i & \forall i \\ \lim (A_k)_{ij} = 0 & \forall j < i. \end{cases}$

rem : ie A_k converge vers une matrice triangulaire supérieure.

démo : * Trouver une factorisation QR de A^k :

On remarque que $A_{k+1} = R_k Q_k \underset{\uparrow}{=} Q_k^* A_k Q_k = Q_k^* Q_{k-1}^* A_{k-1} Q_{k-1} Q_k = \dots = (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^* A (Q_1 \dots Q_k)$

$A_k = Q_k R_k$ donc $R_k = Q_k^* A_k$

En posant $\mathcal{Q}_k = Q_1 \dots Q_k$, on a $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k$.

On a $A^k = Q_1 (R_1 Q_1) \dots (R_1 Q_1) R_1 = Q_1 A_2 \dots A_2 R_1 = Q_1 Q_2 (R_2 Q_2) \dots (R_2 Q_2) R_2 R_1$
$= Q_1 Q_2 \dots Q_k R_k \dots R_2 R_1$

En posant $\mathcal{R}_k = R_k \dots R_2 R_1$, on a $A^k = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k$

* Trouver une autre expression de $\mathcal{Q}_k$ (avec la rem : autre factorisation QR de A^k)

Par hypothèse on a $P^{-1} = LU$ et $P = QR$ par le thm. Donc

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = QRD^kLU \underset{\uparrow}{=} QR(D^kLD^{-k})D^kU.$$

A inversible donc $D^{-k} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-k}, \dots, \lambda_n^{-k})$ existe

Comme L est une matrice triangulaire inférieure avec $L_{ii} = 1$, on a $\lim_{k \to +\infty} D^kLD^{-k} = I_d$.

En posant $D^kLD^{-k} = I_d + F_k$ avec $\lim_{k \to +\infty} F_k = 0$, on a $RD^kLD^{-k} = R(I_d + F_k) = (I_d + RF_kR^{-1})R$

Pour k assez grand, on a $I_d + RF_kR^{-1}$ est inversible, donc elle admet une unique factorisation QR que l'on note $\tilde{Q}_k \tilde{R}_k$ avec $(\tilde{R}_k)_{ii} > 0$.

Les matrices $(\tilde{Q}_k)$ étant unitaires, la suite $(\tilde{Q}_k)$ est bornée. Donc on peut extraire une sous suite $(\tilde{Q}_{\varphi(k)})$ telle que celle-ci converge vers $\tilde{Q}$, qui est aussi unitaire.

Comme $\tilde{R}_{\varphi(k)} = \tilde{Q}_{\varphi(k)}^* (I_d + RF_{\varphi(k)}R^{-1})$, on en déduit que $\tilde{R}_{\varphi(k)}$ converge vers $\tilde{R}$, qui est aussi triangulaire supérieure avec $\tilde{R}_{ii} \geqslant 0 \ \forall i$.

En passant à la limite pour la suite extraite, on a $\tilde{R}\tilde{Q} = I_d$. Ce qui impose $\tilde{R}_{ii} > 0 \ \forall i$.

Par unicité de la factorisation QR de I_d, on a $\tilde{Q} = \tilde{R} = I_d$.

Ceci étant vrai pour toutes sous suites, on obtient que $(\tilde{Q}_k)$ et $(\tilde{R}_k)$ admettent une unique valeur d'adhérence donc elles convergent vers cette valeur d'adhérence. Alors $\lim_{k\to+\infty} \tilde{Q}_k = Id$ et $\lim_{k\to+\infty} \tilde{R}_k = Id$.

Donc $A^k = (Q\tilde{Q}_k)(\tilde{R}_k R D^k U)$ = matrice unitaire . matrice triangulaire supérieure => factorisation QR

Par la rem, on a qu'il existe une matrice D_k diagonale telle que $|(D_k)_{ii}| = 1$ et

$$Q_k = Q\tilde{Q}_k D_k \quad ⊛$$

* Comportement asymptotique des matrices

On a $A_{k+1} = Q_k^* A Q_k$ donc par ⊛ $A_{k+1} = D_k^* \tilde{Q}_k^* Q^* A \, Q\tilde{Q}_k D_k$.

Or $A = PDP^{-1} = QRDR^{-1}Q^*$ donc $A_{k+1} = D_k^* \tilde{Q}_k^* RDR^{-1}\tilde{Q}_k D_k$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} \tilde{Q}_k = Id$, on a $\lim_{k\to+\infty} \tilde{Q}_k^* RDR^{-1}\tilde{Q}_k = RDR^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ⊛⊛

On pose $\mathcal{Q}_k = \tilde{Q}_k^* RDR^{-1}\tilde{Q}_k$ et on obtient

$$(A_{k+1})_{ij} = (\overline{D_k})_{ii} (\mathcal{Q}_k)_{ij} (D_k)_{jj} \quad \text{et} \quad (A_{k+1})_{ii} = \underbrace{|(D_k)_{ii}|}_{=1.} (\mathcal{Q}_k)_{ii} = (\mathcal{Q}_k)_{ii}$$

Ainsi, on a le résultat souhaité avec ⊛⊛

Questions : Méthode QR.

- $\lim D^k L D^{-k} = Id$?

$$(D^k L D^{-k})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i<j \\ 1 & \text{si } i=j \\ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k L_{ij} & \text{si } i>j \end{cases}$$

comme $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ on a $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| < 1$. D'où cette limite

- Pourquoi $Id + RF_kR^{-1}$ est inversible à partir d'un certain rang ?

$\forall k > N$, $|||RF_kR^{-1}||| < 1$. car $\lim_{k \to +\infty} RF_kR^{-1} = 0$. Alors la matrice $Id + RF_kR^{-1}$ est inversible.

En effet, si on note $B = RF_kR^{-1}$ on a

$(Id + B)u = 0$ ssi $u + Bu = 0$ ssi $\|u\| = \|Bu\| \leq |||B||| \, \|u\| < \|u\|$.

Donc $(Id+B)u = 0 \Rightarrow u = 0$. Vrai pour tout u quelconque.

Autrement dit $Id + B$ est inversible.

- La suite $(\tilde{Q}_k)$ est bornée ?

On a $\|\tilde{Q}_k\|_2 = \sqrt{\rho(\tilde{Q}_k \tilde{Q}_k^*)} = \sqrt{\rho(\mathbb{1})} = 1$.

- Extraction d'une sous suite convergente et limite ? Par Bolzano-Weierstrass

La sphère muni de la norme $\|.\|_2$ est un compact donc on peut extraire une sous suite convergente de $\tilde{Q}_k$.

$\tilde{Q}$ est une matrice unitaire car les matrice unitaire est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$.

- Convergence des suites ?

Comme $\tilde{Q}_k$ évolue dans la sphère unité, elle admet une unique valeur d'adhérence et par compacité de S^1 on a que $\tilde{Q}_k$ converge vers celle-ci. Il en résulte alors que $\tilde{R}_k = \tilde{Q}_k (Id + RF_kR^{-1}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} Id$